

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 5

Skalarni, vektorski i mješoviti
produkt vektora

Vježbe iz Matematike 1.

5. Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

Zadatak 1 Koji kut zatvaraju jedinični vektori \vec{m} i \vec{n} ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno ortogonalni?

Rješenje:

Činjenicu da su vektori \vec{a} i \vec{b} ortogonalni pišemo preko skalarnog produkta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) = 0$$

$$5\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} - 4\vec{m}\vec{n} - 8\vec{n}^2 = 0 \text{ (distributivnost, komutativnost i } \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2)$$

$$5|\vec{m}|^2 + 6\vec{m}\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0 \text{ (}\vec{m} \text{ i } \vec{n} \text{ su jedinični: } |\vec{m}| = |\vec{n}| = 1)$$

$$5 + 6 \cos \varphi - 8 = 0 \text{ (}\varphi \text{ je kut između vektora } \vec{m} \text{ i } \vec{n})$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2},$$

$$\text{odakle slijedi da je } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Zadatak 2

Zadano je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Izračunajte $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Rješenje: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b}$

Slično proizlazi

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}, \text{ pa zbrajanjem tih jednakosti imamo}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2), \text{ odakle uvrštavanjem odmah slijedi rješenje:}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 20.$$

Zadatak ima i geometrijsku interpretaciju: nađi kraću dijagonalu paralelograma kojem su duljine stranica 11 i 23, a duljina duže dijagonale iznosi 30.

Zadatak 3 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2, -1, 1)$, $B(4, -2, 2)$ i $C(6, 1, 3)$. Odredite površinu paralelograma te kut između dijagonala.

Rješenje:

U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x, y, z)$, imamo

$$(6 - x)\vec{i} + (1 - y)\vec{j} + (3 - z)\vec{k} = (4 + 2)\vec{i} + (-2 + 1)\vec{j} + (2 - 1)\vec{k}$$

$$(6 - x)\vec{i} + (1 - y)\vec{j} + (3 - z)\vec{k} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah rješenje: $D = (0, 2, 2)$.

Površinu paralelograma ćemo izračunati tako da nađemo skalarni produkt vektora \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AD} , jer znamo da njegov modul odgovara površini paralelograma P. Najprije računamo:

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Sada je površina paralelograma dana s

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 20\vec{k} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 20^2} = 12\sqrt{3}.$$

Računamo vektore dijagonala \overrightarrow{AC} i \overrightarrow{BD} :

$$\overrightarrow{AC} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{DB} = 4\vec{i} - 4\vec{j},$$

pa je (uz oznaku α za kut među dijagonalama)

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{32 - 8}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{2},$$

pa je kut među dijagonalama $\alpha = 30^\circ$.

Zadatak 4 Pokažite da su sljedeći vektori komplanarni

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k},$$

te izrazite \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .

Rješenje: Vektori će biti komplanarni ako je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 2(-7 + 8) + (-7 + 2) + (4 - 1) = 0,$$

što ovdje jest slučaj. Dakle, zadani vektori su komplanarni.

Da izrazimo \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} , trebamo pronaći α i β takve da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$:

$$\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k} = \alpha(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \beta(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}),$$

odakle slijedi sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= 4 \\ \alpha - 2\beta &= -7. \end{aligned}$$

Rješavanjem prve dvije jednadžbe ovog sustava dobivamo $\alpha = -1$, $\beta = 3$, što zadovoljava i treću jednadžbu (to je još jedna potvrda da su vektori komplanarni). Prikaz vektora \vec{c} kao linearne kombinacije vektora \vec{a} i \vec{b} glasi: $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

Zadatak 5 Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = (2x - 6)\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3x - 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = (3 - 8x)\vec{i} + (x - 2)\vec{j} - 3x\vec{k}$ budu komplanarni, te u tom slučaju izrazite vektor \vec{c} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .

Rješenje:

Vektori će biti komplanarni ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} 2x - 6 & 4 & -3 \\ 3x - 1 & 2 & 2 \\ 3 - 8x & x - 2 & -3x \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobivamo dva rješenja:

$$x_1 = 4 \text{ i } x - 2 = -\frac{3}{11}.$$

Pogledajmo kako izgledaju vektori \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} za $x = 4$. Dobiva se

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ i } \vec{c} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Znamo da su ova tri vektora komplanarna, tj. da jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju preostalih dvaju, uzmimo vektor \vec{c} :

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \text{ tj.}$$

$$-29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \beta(11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}),$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore dobivamo

$$\begin{aligned} 2\alpha + 11\beta &= -29 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -12. \end{aligned}$$

Ovaj sustav od tri jednačbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $\alpha = 2$, $\beta = -3$, pa je prikaz vektora \vec{c} kao linearne kombinacije vektora \vec{a} i \vec{b} dan s $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Zadatak 6 Pokažite da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ linearno nezavisni i prikažite vektor \vec{i} kao njihovu linearnu kombinaciju.

Zadatak 7 Dokažite da vektori: $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} + x\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{j} + x\vec{k}$, $\vec{c} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ za nijedan $x \in \mathbb{R}$ nisu komplanarni!